Licenciaturas en Matemáticas y en Computación,
U. de Guanajuato.
Tarea 11 de Álgebra Lineal II: Espacios euclídeos y unitarios.
12 de noviembre de 2012.
Fecha de entrega: lunes 19 de noviembre de 2012.

1. Sea $e_1, e_2, ..., e_n$ una base del espacio vectorial real E. Demuestre que dada una matriz $B = (b_i^j)$ cualquiera, existe siempre una forma bilineal ϕ tal que $\phi(e_j, e_i) = b_i^j$.

2. Sea $e_1, e_2, ..., e_n$ una base del espacio vectorial complejo E.
(a)Demuestre que la matriz $B = (b_i^j)$, donde $b_i^j = \phi(e_j, e_i)$, determina ϕ. Es decir, si $u = \sum_{i=1}^n u^i e_i$ y $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$ entonces
$$\phi(u, v) = u^t B \bar{v}$$
donde u^t es la transpuesta de u y $\bar{v}$ es el vector cuyas componentes son las conjugadas complejas de las de v.
(b) Demuestre que dada una matriz compleja $B = (b_i^j)$ cualquiera, existe siempre una forma sesquilineal ϕ tal que $\phi(e_j, e_i) = b_i^j$.

3. Demuestre que una forma sesquilineal es hermítica si y sólo si su matriz B es hermítica (B es hermítica si $B^t = \bar{B}$).

4. Determine si los siguientes son productos interiores en los espacios vectoriales dados y demuéstrelo o diga porqué no lo son.
(a) Sea el espacio vectorial complejo $H = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} | f \text{ es continua}\}$ y para $f, g \in H$ definamos
$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$
Aquí, si $f(t) = u(t) + iv(t)$ entonces $\int f(t)\, dt = \int u(t) + i \int v(t)\, dt$
(b) Sea el espacio vectorial $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Para $A, B \in V$ definimos
$$\langle A, B\rangle = tr(B^* A)$$
donde B^* es la transpuesta conjugada o adjunta de B, es decir, es la matriz que cumple que $b^*_{ij} = \overline{b_{ji}}$, recordando que si $a + bi \in \mathbb{C}$ entonces $\overline{a + bi} = a - bi$.